

EXERCICES
ÉPREUVE
MATHS 3

INSTRUCTIONS AUX CANDIDATS

Durée de l'épreuve : 2 h

Chaque épreuve contient 16 exercices indépendants. Le candidat doit répondre à 12 exercices sur les 16 qui lui sont présentés, ce qui lui permet d'éliminer les exercices qui porteraient sur une partie du programme non traitée à la date des épreuves écrites. S'il répond à plus de 12 exercices, seuls les 12 premiers seront corrigés.

Chaque exercice comporte 4 affirmations signalées par les lettres a, b, c, d. Pour chacune des affirmations.

le candidat indique si l'affirmation est vraie (V) ou fausse (F), ou il s'abstient ;

Un exercice est considéré comme traité dès qu'une réponse V ou F à l'une des 4 affirmations est donnée ;

Toute bonne réponse rapporte un point, toute réponse inexacte entraîne le retrait d'un point ;

L'abstention et l'annulation ne sont pas considérées comme des réponses, elles ne rapportent ni ne retirent aucun point ;

Une bonification d'un point est ajoutée chaque fois qu'un exercice est traité correctement (c'est à dire si le candidat a fourni 4 réponses exactes à l'exercice).

Exercice n°1

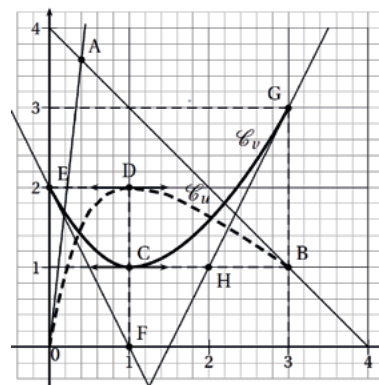
Lecture graphique.

Dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on donne les points $A(0,4;3,6)$, $B(3;1)$, $C(1;1)$, $D(1;2)$, $E(0;2)$, $F(1;0)$, $G(3;3)$ et $H(2;1)$.

Soit u et v deux fonctions définies sur l'intervalle $[0;3]$ de courbes représentatives respectives $\mathcal{C}_u$ et $\mathcal{C}_v$ tracées ci-contre.

On donne les informations suivantes :

- Les droites (OA) et (AB) sont tangentes à $\mathcal{C}_u$ respectivement à l'origine du repère et au point B.
- Les droites (EF) et (GH) sont tangentes à $\mathcal{C}_v$ respectivement aux points E et G.
- $\mathcal{C}_u$ et $\mathcal{C}_v$ admettent respectivement aux points D et C une tangente horizontale.



- $v'(3) = 3$.
- $u'(0) = 9$.
- $\left(\frac{1}{v}\right)'(1) = -v'(1)$.
- $(u \times v)'(3) = 1$.

Exercice n°2

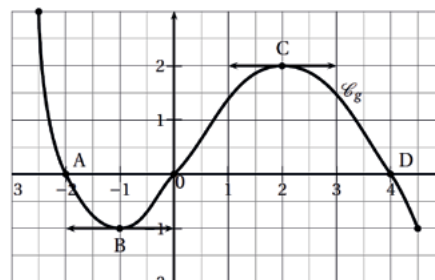
Petites questions de logique sur les fonctions.

Soit f est une fonction définie et dérivable sur $[0;1]$.

- $f(0,5)$ est compris entre $f(0)$ et $f(1)$.
- Si $f(0) > 1$ et $f(1) < 0$ alors l'équation $f(x) = \frac{1}{v}$ admet une unique solution dans l'intervalle $[0;1]$.

Soit g une fonction définie sur l'intervalle $[-2,5;4,5]$ de courbe représentative $\mathcal{C}_g$ ci-contre.

- Si $g(x) = 0$ alors $x = 4$.
- Si $x \in \{-1;0;2;4\}$ alors $f'(x) \times f(x) = 0$.



Exercice n°3

Suites et algorithmes.

On définit la suite (u_n) par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{u_n^2 + 12}$.

Pour tout entier naturel n on pose (v_n) la suite définie par $v_n = u_n^2 - 4$.

On donne les valeurs arrondies à 10^{-2} suivantes :

$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{6}$	$\sqrt{7}$	$\sqrt{8}$	$\sqrt{10}$	$\sqrt{11}$	$\sqrt{12}$	$\sqrt{13}$	$\sqrt{14}$	$\sqrt{15}$
1,41	1,73	2,24	2,45	2,65	2,83	3,16	3,32	3,46	3,61	3,74	3,87

a) $u_1 = \sqrt{3}$, $u_2 = \frac{\sqrt{15}}{2}$ et $u_3 = \frac{3\sqrt{7}}{4}$

b) La suite (v_n) est géométrique.

c) On démontre que, pour tout entier naturel n , $u_n = \sqrt{\frac{4^n - 1}{4^{n-1}}}$

On considère l'algorithme suivant :

Variables	N est un nombre entier naturel U est un nombre réel E est un nombre réel
Traitement	Lire E Affecter à N la valeur 0 Affecter à U la valeur 0 Tant que $2 - U > E$ faire début tant que U prend la valeur $\frac{\sqrt{U^2 + 12}}{2}$ N prend la valeur N+1 Fin Tant que
Sortie	Afficher N

d) Si $E = 0,1$ alors $N = 2$.

Exercice n°4

Limites et asymptotes.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+1}{x^2-3} = -\infty$.

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{3} x e^x = -\infty$.

Soit f la fonction définie sur $] -1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{\sqrt{x+2} + 1}{x+2}$ de courbe représentative $\mathcal{C}_f$ dans le repère orthonormé $(0; \vec{i}, \vec{j})$.

c) $\mathcal{C}_f$ admet la droite d'équation $y = 1$ comme asymptote horizontale en $+\infty$.

d) $\mathcal{C}_f$ admet la droite d'équation $x = -1$ comme asymptote verticale.

Exercice n°5

Calculs d'intégrales.

- a) $\int_0^1 2xe^{x^2} dx = \frac{e^2}{2}.$
- b) $\int_1^2 \left(2 - \frac{3}{x^2}\right) dx = \frac{1}{2}.$
- c) $\int_e^{e^2} \frac{1}{\sqrt{t}} dt = 2 \left(e - e^{\frac{1}{2}}\right).$
- d) $\int_e^{e^2} \frac{1}{x} \ln x dx = \frac{3}{e}.$

Exercice n°6

Etude de deux fonctions *ln*.

Soit f et g les fonctions définies par $f(x) = \ln(2x)$ et $g(x) = \ln(x^2 - 1)$ de courbes représentatives respectives $\mathcal{C}_g$.

- a) $g\left(\frac{1}{2}\right) < 0.$
- b) $g'(x) = \frac{1}{x^2 - 1}.$
- c) La tangente à $\mathcal{C}_g$ en $x = \sqrt{2}$ a pour équation $y = 2\sqrt{2}x - 4.$
- d) Si $x \in]1; 1 + \sqrt{2}]$, la courbe $\mathcal{C}_g$ est située au dessus de $\mathcal{C}_f.$

Exercice n°7

Etude d'une fonction exponentielle.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{x^2 - 2x}.$

- a) $f(1) = -\frac{1}{e}.$
- b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x).$
- c) $f'(x) = f(x).$
- d) L'équation $f(x) = \frac{1}{3}$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}.$

Exercice n°8

Notions de base sur les complexes.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Le point A a pour affixe $z_A = 1 + i$.

Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre O passant par le point A et B un point de $\mathcal{C}$ d'affixe réelle z_B positive. On définit le point E tel que le quadrilatère $OBEA$ soit un losange.

- $z_A = e^{i\frac{\pi}{4}}$.
- L'affixe du point B est $z_B = \frac{3}{2}$.
- L'affixe du point E est $z_E = (1 + \sqrt{2}) + i$.
- $OE = 2\sqrt{2}$.

Exercice n°9

Petit exercice de probabilité.

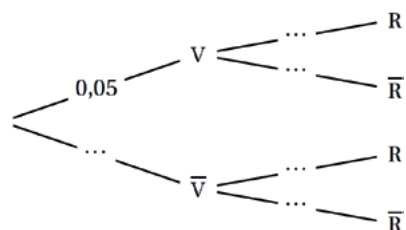
Mon vélo est sujet à de trop fréquentes crevaisons.

Une fois sur dix, quand je prends mon vélo au moins l'une des deux roues est crevée ; la probabilité que la roue avant soit crevée vaut 0,05 et les crevaisons à la roue avant et à la roue arrière sont indépendantes.

Je vais chercher mon vélo un jour quelconque, on note :

V l'événement « la roue avant est crevée ».

R l'événement « la roue arrière est crevée ».



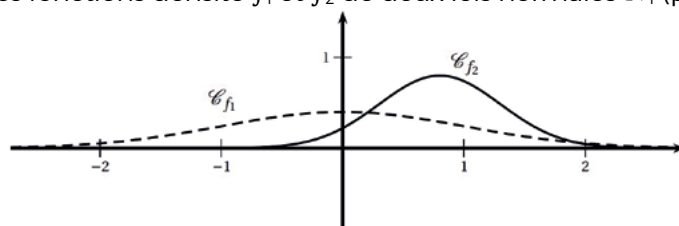
- $P(V \cup R) = 0,1$ et $P(V \cap R) = 0,05 \times P(V)$.
- J'ai constaté que la roue arrière était crevée ; la probabilité que la roue avant le soit également vaut 0,05.
- La roue avant et la roue arrière ont la même probabilité d'être crevée.
- Il y a une chance sur 380 pour que les deux roues soient crevées.

Exercice n°10

Probabilités continues.

Soit μ_1 et μ_2 deux nombres réels, σ_1 et σ_2 deux nombres réels positifs.

Sur le graphique ci-dessous ont été représentées $\mathcal{C}_{f_1}$ et $\mathcal{C}_{f_2}$ respectivement les courbes représentatives des fonctions densité f_1 et f_2 de deux lois normales $\mathcal{N}(\mu_1; \sigma_1^2)$ et $\mathcal{N}(\mu_2; \sigma_2^2)$.

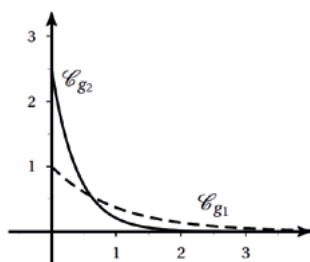


($\mathcal{C}_{f_1}$ en pointillés et $\mathcal{C}_{f_2}$ en trait plein).

a) $\mu_1 < \mu_2$ et $\sigma_1 < \sigma_2$.

Soit λ_1 et λ_2 deux nombres réels strictement positifs.

Sur le graphique ci-dessous ont été représentées $\mathcal{C}_{g_1}$ et $\mathcal{C}_{g_2}$ respectivement les courbes représentatives des fonctions densité g_1 et g_2 de deux lois exponentielles de paramètres respectifs λ_1 et λ_2 .



($\mathcal{C}_{g_1}$ en pointillés et $\mathcal{C}_{g_2}$ en trait plein)

b) $\lambda_1 < \lambda_2$.

Dans une région agricole, le rendement des parcelles de blé peut être assimilé à une variable aléatoire suivant la loi normale d'espérance 100 et d'écart-type 8 (en quintaux par hectare.)

On choisit une parcelle au hasard et on note R son rendement.

- c) La variable aléatoire $Z = \frac{R - 100}{8}$ suit la loi normale centrée réduite.
- d) La probabilité que la parcelle ait un rendement inférieur à 116 quintaux par hectare est égale à 0,9.

Exercice n°11

Notions de base dans l'espace.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(0; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère des deux plans (P) et (Q) d'équations cartésiennes respectives (P) : $x - y = 0$ et (Q) : $y + 2z - 3 = 0$. Ces plans se coupent selon une droite Δ et on pose K le point de coordonnées K(1;0;2).

- a) (P) et (Q) sont deux plans orthogonaux.
- b) Le vecteur $\vec{u}(2;2;-1)$ est un vecteur directeur de la droite Δ .
- c) $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = \frac{3-t}{2} \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$ est une représentation paramétrique de la droite Δ .
- d) Le plan (R) d'équation cartésienne $2x + 2y - z = 0$ est parallèle à Δ et contient la droite (OK).

Exercice n°12

Utilisation des complexes en géométrie.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(0; \vec{u}, \vec{v})$. Soit (E) l'équation $z^2 - 6z + 12 = 0$.

- a) (E) admet deux solutions complexes z_1 et z_2 .

On pose z_1 la solution ayant une partie imaginaire positive.

- b) $4 - z_1 = 2e^{2i\frac{\pi}{3}}$.

Soit A le point d'affixe $z_A = 4$ et M_1, M_2 les points d'affixes respectives z_1 et z_2 .

- c) $(\vec{u}, \overrightarrow{OM_1}) = \frac{\pi}{6} \pmod{2\pi}$.
- d) Le point M_1 est situé sur le cercle de diamètre [OA].

Exercice n°13

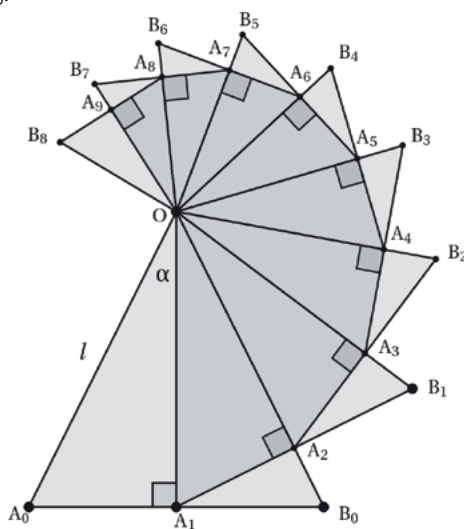
Un peu de trigonométrie dans escargot.

Dans le triangle OA_0B_0 , isocèle en O , A_1 est le milieu du segment $[A_0;B_0]$.

On note B_1 le symétrique de A_1 par rapport à la droite (OB_0) et A_2 le milieu du segment $[A_1;B_1]$.

En réitérant le processus on obtient, pour tout entier naturel n , une suite de triangles isocèles OA_nB_n (cf figure ci-dessous).

On pose $\alpha = \widehat{A_0OA_1}$ et $l = OA_0$.



« Il y a loin de la route aux escargots »
Paul Eluard - Proverbes

- a) Pour tout entier naturel n on a $OA_{n+1} = \sin \alpha \times OA_n$ et $A_nA_{n+1} = \cos \alpha \times OA_n$.
b) Pour tout entier naturel n on a $OA_n = l \times (\cos \alpha)^n$.

On pose, pour tout entier naturel n non nul, la suite (L_n) définie par $L_n = A_0A_1 + A_1A_2 + \dots + A_{n-1}A_n$.

- c) $L_n = l \times \sin \alpha \times \frac{1 - (\cos \alpha)^{n+1}}{1 - \cos \alpha}$.

On rappelle que, pour tout réel x , on a $\sin^2(x) = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ et $\sin(2x) = 2 \times \sin x \times \cos x$.

- d) $L_n = l \times \frac{1 - (\cos \alpha)^n}{\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$.

Exercice n°14

Fonction dépendant d'un paramètre.

Pour tout nombre réel k strictement positif, on définit la fonction f_k par $f_k(x) = (x + k)e^{-x}$ de courbe représentative $\mathcal{C}_k$.

Par exemple si $k = 7$, la fonction f_7 est définie sur $\mathbb{R}$ par $f_7(x) = (x + 7)e^{-x}$.

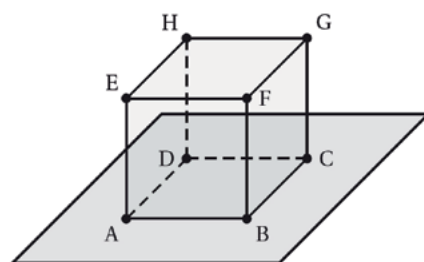
- $\mathcal{C}_k$ coupe les axes du repère aux points de coordonnées $(k;0)$ et $(0;k)$.
- Si $k = 3$ alors la fonction f_3 admet e^2 comme minimum sur $\mathbb{R}$.
- La fonction f_k définie par $f_k(x) = (-x - 1 - k)e^{-x}$ est une primitive de f_k .
- L'aire de la portion de plan délimitée par la courbe $\mathcal{C}_3$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$ est égale à $4 - 5e^{-1}$.

Exercice n°15

Notions d'espace dans un cube.

ABCDEFGH est un cube de côté 1 et $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$ est un repère orthonormé de l'espace.

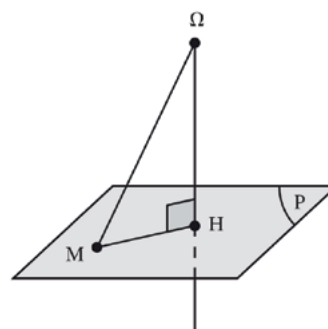
- Le volume du tétraèdre BCDG est égal à $\frac{1}{6}$.
- L'aire du triangle BDG est égale à $\frac{\sqrt{3}}{4}$.



Définition :

On appelle distance du point Ω au plan (P) la plus petite distance ΩM avec M un point du plan (P) , elle représente la distance ΩH avec H le projeté orthogonal du point Ω dans le plan (P) .

- La distance du point C au plan (BDG) est égale à $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.
- Une équation cartésienne du plan (BDG) est $x + y - z - 1 = 0$.



Exercice n°16

Etude d'une spirale.

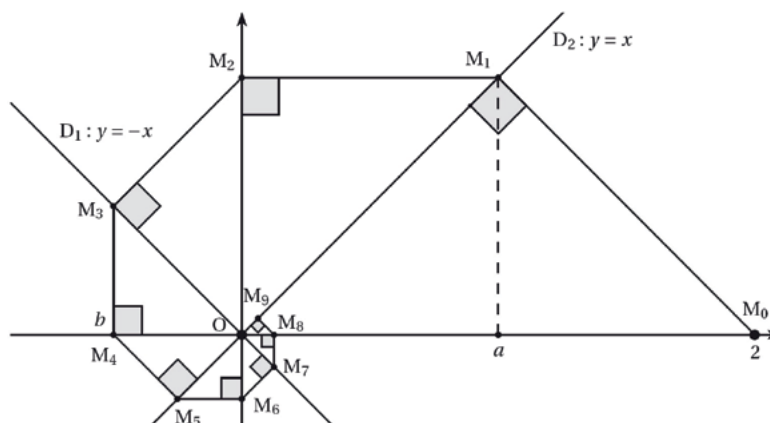
Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé du plan.

D_1 et D_2 sont les droites d'équations $D_1 : y = -x$, $D_2 : y = x$ et M_0 représente le point de coordonnées $(2;0)$.

On construit M_1 le projeté orthogonal de M_0 sur la droite D_2 , M_2 le projeté orthogonal de M_1 sur l'axe des ordonnées, M_3 le projeté orthogonal de M_2 sur la droite D_1 et M_4 le projeté orthogonal de M_3 sur l'axe des abscisses.

On réitère le même procédé afin de définir, pour tout entier naturel n , la suite de points (M_n) représentée cidessous.

On note a l'abscisse du point M_1 et b l'abscisse du point M_4 avec a et b deux nombres réels.



a) $a = 1$ et $M_1 M_2 = 1$.

b) $M_2 M_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

On définit les suites (l_n) et (S_n) à l'aide des relations $l_n = M_n M_{n+1}$ et $S_n = \sum_{k=0}^n l_k$.

c) $l_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times l_n$.

d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 2\sqrt{2} + 1$.

Correction QCM

Exercice n°1a) ☒ b) ☐ c) ☐ d) ☐**Exercice n°3**a) ☐ b) ☐ c) ☐ d) ☐**Exercice n°5**a) ☐ b) ☐ c) ☐ d) ☐**Exercice n°7**a) ☐ b) ☐ c) ☐ d) ☐**Exercice n°9**a) ☐ b) ☐ c) ☐ d) ☐**Exercice n°11**a) ☐ b) ☐ c) ☐ d) ☐**Exercice n°13**a) ☐ b) ☐ c) ☐ d) ☐**Exercice n°15**a) ☐ b) ☐ c) ☐ d) ☐**Exercice n°2**a) ☐ b) ☐ c) ☐ d) ☐**Exercice n°4**a) ☐ b) ☐ c) ☐ d) ☐**Exercice n°6**a) ☐ b) ☐ c) ☐ d) ☐**Exercice n°8**a) ☐ b) ☐ c) ☐ d) ☐**Exercice n°10**a) ☐ b) ☐ c) ☐ d) ☐**Exercice n°12**a) ☐ b) ☐ c) ☐ d) ☐**Exercice n°14**a) ☐ b) ☐ c) ☐ d) ☐**Exercice n°16**a) ☐ b) ☐ c) ☐ d) ☐